BAB III

PENENTUAN HARGA OPSI EROPA DENGAN METODE TRANSFORMASI

3.1 Penentuan Harga Opsi *call* Eropa dengan Transformasi Fourier

Seperti yang telah dijelaskan pada bab II, $C_T(k)$ menotasikan harga opsi *call* dengan *strike price* K, dan S_T adalah harga saham pada saat waktu jatuh tempo T. Misalkan K dan S_T dinyatakan dalam bentuk eksponensial menjadi $K = e^k$ dan $S_T = e^s$. Misalkan pula $q_T(s)$ adalah fungsi densitas dari ln harga saham S_T pada saat waktu jatuh tempo T. Fungsi karakteristiknya didefinisikan sebagai berikut:

$$\phi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} q_T(s) ds \qquad \dots(3.1)$$

Nilai opsi *call* dirumusakan dengan perumusan berikut (Carr, et.al., 1998):

$$C_T(K) = e^{-rT} E[maks\,\{S_T - K, 0\}]$$

$$C_T(K) = e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^s - e^k)\, q_T(s)\, ds \qquad \dots(3.2)$$

Perhatikan bahwa:

$$\lim_{k \to -\infty} C_T(K) = \lim_{k \to -\infty} C_T(e^k) = S_T$$

mengakibatkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_T(K) dK = \infty$$

sehingga $C_T(K)$ bukan anggota L^1. Supaya transformasi *Fourier* dapat terdefinisi dengan baik pada nilai opsi *call*, maka Carr, et. Al., (1998) memodifikasi fungsi pada perumusan (3.2) menjadi:

$$c_T(k) = e^{ak} C_T(K) \qquad \dots(3.3)$$

dengan $a > 0$. Dengan demikian, $\lim_{k \to -\infty} c_T(k) = \lim_{k \to -\infty} e^{ak} C_T(K) = 0$, dan $\lim_{k \to \infty} c_T(k) = \lim_{k \to \infty} e^{ak} C_T(K) = 0$ serta $c_T(k)$ merupakan fungsi yang terintegralkan (berbentuk eksponensial), sehingga $\int_{-\infty}^{\infty} |c_T(k)|\, dk < \infty$ atau $c_T(k) \in L^1$.

Selanjutnya dengan mendefinisikan suatu fungsi baru $\psi_T(v)$ sebagai transformasi Fourier dari $c_T(k)$:

$$\psi_T(v) = \mathcal{F}\big(c_T(k)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk}\, c_T(k)dk \qquad \dots (3.4)$$

Dan dengan menggunakan invers transformasi Fourier, perumusan $c_T(k)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_T(v)\big) = c_T(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk}\,\psi_T(v)dv \qquad \dots (3.5)$$

Untuk selanjutnya, akan dibahas penyederhanaan bentuk transformasi Fourier dari $c_T(k)$. Dengan mengsubstitusikan persamaan (3.2) ke persamaan (3.3) dan disubstitusikan lagi ke persamaan (3.4), maka transformasi Fourier dari $c_T(k)$ menjadi:

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk}\, e^{ak} e^{-rT}\int_{p}^{\infty} (e^s - e^k)\, q_T(s)\, dsdk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s)e^{-rT}\int_{-\infty}^{s} e^{ak}(e^s - e^k)e^{ivk}\; dkds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s)e^{-rT}\int_{-\infty}^{s}\left(e^{(a+iv)k+s} - e^{(a+1+iv)k}\right) dkds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s)e^{-rT}\lim_{b\to\infty}\int_{b}^{s}\left(e^{(a+iv)k+s} - e^{(a+1+iv)k}\right) dkds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s)e^{-rT}\left(\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(a+iv)}e^{(a+iv)k+s} - \frac{1}{(a+1+iv)}e^{(a+1+iv)k}\right)\Bigg|_{b}^{s}\right)ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s)e^{-rT}\left(\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{s+(a+iv)s}}{a+iv} - \frac{e^{(1+a+iv)s}}{1+a+iv}\right) - \left(\frac{e^{s+(a+iv)b}}{a+iv} - \frac{e^{(1+a+iv)b}}{1+a+iv}\right)\right)ds$$

Karena $\lim\limits_{b\to-\infty} e^{(a+iv)b} = 0$, maka:

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s)\left(\frac{e^{s+(a+iv)s}}{a+iv} - \frac{e^{(1+a+iv)s}}{1+a+iv}\right)\; ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left(\frac{e^{(1+a+iv)s}}{a+iv} - \frac{e^{(1+a+iv)s}}{1+a+iv} \right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left(\frac{e^{(1+a+iv)s}}{(a+iv)(1+a+iv)} \right) ds$$

$$= \frac{e^{-rT}}{(a+iv)(1+a+iv)} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) e^{(1+a+iv)s} \, ds$$

$$= \frac{e^{-rT}}{a^2+a+iv(2a+1)-v^2} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) e^{i(v-(a+1)i)s} \, ds$$

$$= \frac{e^{-rT} \phi_T(v-(a+1)i)}{a^2+a+iv(2a+1)-v^2} \qquad \text{... (3.6)}$$

Perhatikan bahwa $C_T(K) = e^{-ak} c_T(k)$, dengan mensubstitusikan persamaan (3.5) ke persamaan (3.3) diperoleh:

$$C_T(K) = \frac{e^{-ak}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv \qquad \text{... (3.7)}$$

Untuk selanjutnya, perhatikan bahwa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv = \int_{-\infty}^{0} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv + \int_{0}^{\infty} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv \qquad \text{... (3.8)}$$

Karena $C_T(K)$ harus bernilai *real*, maka hal tersebut akan memaksa e^{-ivk} $\psi_T(v)$ merupakan fungsi genap pada bagian *real* nya dan fungsi ganjil pada bagian imajinernya. Sehingga dapat ditulis (Carr, et.al., 1998):

$$Re \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv \right\} = Re \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv \right\}$$

dan …(3.9)

$$Im \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv \right\} = -Im \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv \right\}$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (3.9) menjadi:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-ivk} \, \psi_T(v) dv = \overline{\int_{0}^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv}$$

yang mengakibatkan persamaan (3.8) menjadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivk}\,\psi_T(v)dv = 2Re\left\{\int_0^{\infty} e^{-ivk}\,\psi_T(v)dv\right\}$$

sehingga

$$C_T(K) = \frac{e^{-ak}}{\pi}\;Re\left\{\int_0^{\infty} e^{-ivk}\,\psi_T(v)dv\right\} \qquad \ldots(3.10)$$

Untuk selanjutnya, akan dilakukan pendekatan diskrit dari $C_T(K)$. Perhatikan bahwa:

$$C_T(K) = \frac{e^{-ak}}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-ivk}\,\psi_T(v)dv \qquad \ldots(3.11)$$

Misalkan $g(v) = e^{-ivk}\psi_T(v)$, dengan menggunakan aturan trapesium diperoleh (Ng, 2005):

$$\int_0^{A} g(v)\,dv \approx \frac{\Delta v}{2}\left[g(v_1) + 2\sum_{n=2}^{N-1} g(v_n) + g(v_N)\right]$$

$$\approx \Delta v\left[\sum_{n=1}^{N} g(v_n) - \frac{1}{2}[\,g(v_1) + g(v_N)]\right] \qquad \ldots(3.12)$$

dimana $A = N\Delta v$. Misalkan pula:

$$v_n = (n-1)\Delta v \qquad \ldots(3.13)$$

dengan $n = 1,2,\ldots,N$, selanjutnya didefinisikan:

$$k_u = -b + \Delta k(u-1), u = 1,2,\ldots,N \qquad \ldots(3.14)$$

sebagai grid dalam k-domain dan Konstanta $b = \frac{\Delta kN}{2}, b \in \mathbb{R}$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.14), persamaan (3.13) ke persamaan (3.12), diperoleh:

$$\int_0^{A} g(v)\,dv \approx \Delta v\left[\sum_{n=1}^{N} e^{-iv_n k_u}\psi_T(v_n) - \frac{1}{2}[\,g(v_1) + g(v_N)]\right]$$

$$\approx \Delta v\left[\sum_{n=1}^{N} e^{-i(n-1)\Delta v\left(-b+\Delta k(u-1)\right)}\psi_T(v_n) - \frac{1}{2}[\,g(v_1) + g(v_n)]\right]$$

$$\approx \Delta v\left[\sum_{n=1}^{N} e^{-i\Delta v\Delta k(n-1)(u-1)}e^{i(n-1)b\Delta v}\psi_T(v_n)-\frac{1}{2}[\,g(v_1)+g(v_n)]\right]$$

(3.15)

Dengan memisalkan $\Delta v\Delta k=\frac{2\pi}{N}$. Bagian dari persamaan (3.15) ini mengikuti bentuk umum DFT seperti yang dikemukaan pada persamaan (2.35). Dengan demikian, FFT dapat dipergunakan untuk menghitung komponen sigma pada persamaan (3.15) dengan syarat $g(v_1)=g(0)$ ada. Dengan demikian, taksiran harga opsi *call* Eropa diperoleh dengan perumusan sebagai berikut:

$$\hat{C}_T(k_u)\approx\frac{e^{-ak_u}}{\pi}\Delta v\left[\sum_{n=1}^{N}\omega_N{}^{(n-1)(u-1)}e^{iv_nb}\psi_T(v_n)-\frac{1}{2}[\,g(v_1)+g(v_n)]\right] \quad \text{... (3.16)}$$

Selain menggunakan kaidah trapesium, proses pendekatan diskritnya juga dapat dipergunakan aturan simpson $1/3$ terhadap bentuk (3.11). Diketahui aturan simpsons $\frac{1}{3}$, untuk n genap dirumusakan sebagai berikut:

$$I=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left(f_1+4\sum_{i=1,3,..}^{n-1}f_i+\;2\sum_{i=2,4,...}^{n-2}f_i+f_N\right)$$

$$\approx\frac{h}{3}\left(\sum_{i=1}^{N}f_i\left(3+(-1)^{i+1}-\delta_{j-1}\right)-f_N\right) \quad \text{... (3.17)}$$

Dimana δ_j adalah sebagai fungsi kronecker delta yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\delta_j=\begin{cases}0, & jika\; j\neq 0\\ 1, & jika\; j=0\end{cases}$$

Dengan memisalkan $l=\frac{2\pi}{\Delta v\Delta k}$, berdasarkan ketentuan seperti pada persamaan (3.17) maka perumusan harga opsi *call* adalah sebagai berikut:

$$\hat{C}_T(k_u)\approx\frac{e^{-ak_u}}{\pi}\left(\frac{\Delta v}{3}\sum_{j=0}^{N-1}\omega_N{}^{(n-1)(u-1)}e^{iv_nb}\psi_T(v_n)\left(3+(-1)^{j+1}-\delta_{j-1}\right)\right.$$

$$\left.+g(v_n)\right) \quad \text{... (3.18)}$$

Komponen sigma pada persamaan (3.18) juga mengikuti bentuk umum dari DFT seperti yang dikemukakan pada bab II, sehingga FFT dapat diterapkan pada persamaan tersebut.

$C_T(K)$ hanya mengandung komponen real dari sigma, maka taksiran untuk harga opsi *call* adalah :

$$\hat{C}_T(k_u) \approx \frac{e^{-ak_u}}{\pi} Re\left\{\frac{\Delta v}{3}\sum_{n=1}^{N} \omega_N{}^{(n-1)(u-1)} e^{iv_n b} \psi_T(v_n)\left(3 + (-1)^{j+1} - \delta_{j-1}\right) - g(v_N)\right\} \quad \text{... (3.19)}$$

Untuk lebih ringkasnya, prosedur penentuan harga opsi Eropa dengan menggunakan transformasi *Fourier* adalah sebagai berikut:

1. Input data harga saham
2. Lakukan estimasi parameter berdasarkan model yang digunakan.
3. Tentukan a, N, dan Δv
4. Kemudian tentukan beberapa parameter lain dengan ketentuan sebagai berikut:
   a. $\lambda = \frac{2\pi}{N\Delta v}$
   b. $b = -\frac{1}{2}N\lambda$.
   c. $v_n = (n-1)\Delta v$
5. Menentukan nilai psi

$$\psi_T(v) = \frac{e^{-rT}\phi_T(v-(a+1)i)}{a^2 + a + iv(2a+1) - v^2}$$

   Sebagai catatan, fungsi karakteristik yang digunakan pada metode ini adalah fungsi karakteristik untuk $\log S_t$.
6. Menentukan harga opsi *call* Eropa dengan sebagai berikut :

$$\hat{C}_T(k_u) \approx \frac{e^{-ak_u}}{\pi} Re\left\{\frac{\Delta v}{3}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N{}^{(n-1)(u-1)} e^{iv_n b} \psi_T(v_n)\left(3 + (-1)^{j+1} - \delta_{j-1}\right) + g(v_N)\right\}$$

7. Hitung dengan menggunakan FFT.

3.2 Penentuan Harga Opsi *Put* Eropa dengan Transformasi Hilbert

Misalkan pergerakan harga saham dimodelkan sebagai berikut:

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad \text{... (3.20)}$$

dimana X_t adalah proses stokastik yang dimulai dari 0. Harga opsi *put* Eropa dinotasikan dengan $P_T(K)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$P_T(K) = e^{-rT} E[\max\{K - S_0 e^{X_t}, 0\}] \quad \text{... (3.21)}$$

Nilai ekspektasi tersebut dibagi kedalam dua keadaan yaitu $E[K - S_0 e^{X_t}]$ jika $-S_0 e^{X_t} \geq 0$, dan $E(0)$ untuk $K - S_0 e^{X_t} < 0$. Perhatikan bahwa:

$$K - S_0 e^{X_t} \geq 0$$
$$K \geq S_0 e^{X_t}$$
$$\ln K \geq \ln S_0 + \ln e^{X_t}$$
$$X_t \leq \ln K - \ln S_0$$

Sehingga harga opsi *put* pada persamaan (3.21) menjadi:

$$P_T(K) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\ln K - \ln S_0} (K - S_0 e^{X_t})\, p(X_t) dX_t$$

$$= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\ln K - \ln S_0} (Kp(X_t) dX_t) - \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{X_t} 1_{\{X_T \leq (\ln K - \ln S_0)\}}\, p(X_t) dX_t$$

$$= e^{-rT} \left(KP\left(X_T \leq (\ln K - \ln S_0)\right) - S_0 E\left[e^{X_t} 1_{\{X_T \leq (\ln K - \ln S_0)\}}\right]\right) \quad \text{... (3.22)}$$

Xiong Lin (2010) mengkaitkan persamaan (3.22) dengan teorema transformasi Hilbert yang berkaitan dengan fungsi distribusi kumulatif dan ekspektasi. Dengan menggunakan teorema 2.7.1 tentang fungsi distribusi kumulatif, maka persamaan (3.22) menjadi:

$$P_T(K) = e^{-rT} \left(\left(K\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\mathcal{H}\left(e^{-i\xi \ln\frac{K}{S_0}}\phi\right)(0)\right) - S_0 E\left[e^{X_t} 1_{\{X_T \leq (\ln K - \ln S_0)\}}\right]\right)\right)$$

$$= e^{-rT} \left(\left(\left(\frac{K}{2} - \frac{iK}{2}\mathcal{H}\left(e^{-i\xi \ln\frac{K}{S_0}}\phi\right)(0)\right) - S_0 E\left[e^{X_t} 1_{\{X_T \leq (\ln K - \ln S_0)\}}\right]\right)\right)$$

(3.23)

S_t merupakan *martingale* yang artinya $E(S_0 e^{X_T}) < \infty$, yang mengakibatkan $E(e^{aX}) < \infty$, sehingga teorema 2.8.2 dapat diterapkan, yang menyebabkan persamaan (3.23) menjadi sebagai berikut.

$$P_T(K) = e^{-rT}\left(\frac{K}{2} - \frac{Ki}{2}\mathcal{H}\left(e^{-i\xi \ln\frac{K}{S_0}}\phi\right)(0)\right)$$

$$-e^{-rT}\, S_0\left(\frac{\phi(-i)}{2} - \frac{1}{2}i\mathcal{H}\left(e^{-i\left(\ln\frac{K}{S_0}\right)\xi}\phi(\xi - i)\right)(0)\right)$$

$$= e^{-rT}\left(\frac{K}{2} - S_0\frac{\phi(-i)}{2} + \frac{i}{2}\left(S_0\mathcal{H}\left(e^{-i\left(\ln\frac{K}{S_0}\right)\xi}\phi(\xi - i)\right)(0) - K\mathcal{H}\left(e^{-i\xi\ln\frac{K}{S_0}}\phi\right)(0)\right)\right)$$

... (3.24)

Terdapat pendekatan metode FFT dari fungsi harga opsi *call* dan opsi *put* dari bentuk berikut (Lin, 2010):

$$H(x,\phi) = \mathcal{H}\left(e^{-i\xi x}\phi(\xi)\right)(0) \qquad \text{... (3.25)}$$

Persamaan (3.26) akan dilakukan pendekatan diskrit berdasarkan persamaan (2.42) dengan $x = 0$. Dengan memilih *truncation level* M, maka bentuk pendekatan diskrit persamaan (3.25) adalah:

$$H_{h,M}(x,\phi) \approx \sum_{m=-M,m\neq 0}^{m=M} e^{-ixmh}\phi(mh)\,\frac{1-(-1)^{-m}}{-\pi m} \qquad \text{... (3.26)}$$

Persamaan diatas mengandung bentuk $1-(-1)^{-m}$ yang akan bernilai 0 ketika m genap, dan bernilai 2 ketika m ganjil. Dengan alasan tersebut dan supaya indeks sigma dimulai dari $m = 0$, maka pada persamaan (3.26) m diubah menjadi $2m + 1 - M$

$$H_{h,M}(x,\phi) \approx e^{ix(M-1)h}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-2ixmh}\,\frac{2\phi\big((2m+1-M)h\big)}{\pi(M-2m-1)} \qquad \text{... (3.27)}$$

Diberikan $x_0 \in \mathbb{R}$ dan $\delta > 0$ dengan $x_n = x_0 + n\delta, n = 0,1,\dots,M-1$. Misalkan $\theta = h\delta/\pi$, maka untuk $x = x_n$ menjadi:

$$H(x_n,f) \approx e^{ix_n(M-1)h}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-2\pi imn\theta}\,\frac{2f\big((2m+1-M)h\big)}{\pi(M-2m-1)}\,e^{-2ix_0mh} \qquad \text{... (3.28)}$$

Dengan h adalah *step size*, M adalah *truncation level*, $n = 0,1,\dots,M-1$, $x_n = x_0 + n\delta$, $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$, dan $\theta = h\delta/\pi$. Bentuk tersebut mengikuti bentuk umum DFT, sehingga dapat diaplikasikan fft pada bentuk ini dengan syarat $\theta = 1/M$.

Sehingga nilai pendekatan opsi *call* dan *put* Eropa menjadi:

$$\hat{P}_T(K) = e^{-rT}\left(\frac{K}{2} - S_0\frac{\phi(-i)}{2} + \frac{iS_0}{2}p_1 - \frac{iK}{2}p_2\right) \qquad \dots (3.29)$$

dengan

$$p_1 = \mathcal{H}\left(e^{-i\left(\ln\frac{K}{S_0}\right)\xi}\phi(\xi - i)\right)(0)$$

$$\approx e^{i\ln\frac{K}{S_0}(M-1)h}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-2\pi imn\theta}\,\frac{2\phi\big((2m+1-M)h - i\big)}{\pi(M-2m-1)}e^{-2ix_0mh} \qquad \dots (3.30)$$

$$p_2 = \mathcal{H}\left(e^{-i\xi\ln\frac{K}{S_0}}\phi(\xi)\right)(0)$$

$$\approx e^{i\ln\frac{K}{S_0}(M-1)h}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-2\pi imn\theta}\,\frac{2\phi\big((2m+1-M)h\big)}{\pi(M-2m-1)}e^{-2ix_0mh} \qquad \dots (3.31)$$

dengan demikian, FFT dapat di aplikasikan pada penentuan harga opsi dengan metode transformasi *Hilbert* ini.

Selanjutnya, langkah-langkah melakukan penentuan harga opsi Eropa dengan menggunakan transformasi *Hilbert* adalah sebagai berikut:

1. Input data harga saham.
2. Lakukan estimasi parameter berdasarkan model yang akan digunakan.
3. Pilih M yang merupakan bilangan perpangkatan 2, h, δ, x_0, dan θ dengan aturan $\theta = \frac{h\delta}{\pi} = 1/M$ dan $x_n = x_0 + n\delta, n = 0,1,\dots,M-1$, $x_0 \in \mathbb{R}$ dan $\delta > 0$.
4. Hitung dengan menggunakan FFT:
   1) $p_1 = e^{i\ln\frac{K}{S_0}(M-1)h}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-2\pi imn\theta}\,\frac{2\phi((2m+1-M)h-i)}{\pi(M-2m-1)}e^{-2ix_0mh}$
   2) $p_2 = e^{i\ln\frac{K}{S_0}(M-1)h}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-2\pi imn\theta}\,\frac{2\phi((2m+1-M)h)}{\pi(M-2m-1)}e^{-2ix_0mh}$
5. Menghitung harga opsi Eropa dengan sebagai berikut :

$$\hat{P}_T(K) = e^{-rT}\left(\frac{K}{2} - S_0\frac{\phi(-i)}{2} + \frac{iS_0}{2}p_1 - \frac{iK}{2}p_2\right)$$

Sebagai catatan, fungsi karakteristik yang digunakan pada metode ini adalah fungsi karakteristik untuk $\ln S_t/S_0$.